Grebennikov Alexandre

General Ray Method for Solution of Direct and Inverse Problems for Differential Equations of Mathematical Physics

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Ciudad Universitaria, Av. San Claudio y Río Verde, 72570, Puebla, México.

MAX Press,
Moscow, 2016

Метод Обобщенных Лучей для Решения Прямых и Обратных Задач для Диференциальных Уравнений Математической Физики

Гребенников Александр Иванович, профессор

Заслуженный Независимый Университет г. Пуэбла, Мексика
e-mail: agrebe50@gmail.com

Книга доступна на сайте: https://elibrary.ru/item.asp?id=26212814

Автором предложен новый подход для решения прямых и обратных задач для уравнений математической физики, т.е. уравнений в частных производных (УЧП), на основе нового физического Принципа Обобщенных Лучей (ПОЛ). Прямые задачи (ПЗ) представляют краевые задачи, состоящая в определении решения уравнения с известными в уравнении коэффициентами, правой частью, граничными и начальными условиями. Обратные задачи (ОЗ) состоят в определении неизвестных коэффициентов или правой части уравнения с помощью некоторых более полных граничных и начальных условий.

Существует два основных подхода для решения ПЗ для дифференциальных уравнений в явной аналитической форме: разложение Фурье и метод функции Грина [1]. Разложение Фурье используется, как правило, только в теоретические исследования. Метод функции Грина является явным, но трудно построить функции Грина для сложной геометрии рассматриваемой области, а также для уравнения с переменными коэффициентами. Известные численные методы и алгоритмы основаны на конечных разностях, конечных элементах и граничных интегральных уравнений. Эти численное подходы приводят к решения систем линейных алгебраических уравнений [2], которые требуют много памяти компьютера и времени вычислений. Известные математические методы для решения обратных задач являются нелинейными [3] - [6] и также требуют много времени и памяти в компьютерной реализации.

Современные исследования в различных прикладных областях, основанный на решение упомянутых ПЗ и ОЗ, характеризуются необходимостью более существенного проникновения в структуру исследуемых объектов и явлений, а также рассмотрением областей сложной геометрической структуры. Это требует разработки новых аналитических и численных методов исследования, адаптированных к современным требованиям. Одним из наиболее важных из этих требований является возможность получить достаточное увеличение точности решения проблем в режиме реального времени, или, что эквивалентно, решить проблему с соответствующей точностью быстрым образом. Математические модели и известных численные методы часто не удовлетворяют этим требованиям при их компьютерной реализации. Таким образом развитие новых методов и быстрых алгоритмов для решения упомянутых проблем очень актуально.

В этой книге предложен новый подход для решения ПЗ и ОЗ с использованием ПОЛ. ПОЛ состоит в рассмотрении физических полей как суперпозиции векторов (обобщенных лучей), соответствующих всевозможным линиям, которые пересекают расматриваемую область решения задачи. Применение ПОЛ к исследуемым проблемам означает трансформацию УЧП и граничных значений в семейство обычных дифференциальных уравнений (ОДУ) с соответствующими граничными условиями. Трансформация использует классические прямое преобразование Радона (ППР) и обратное преобразование Радона (ОПР) [7]. На основе ПОЛ автором разработан Метод Обобщенных Лучей (МОЛ), который дает явные аналитические решения рассмотреных проблем и быстрые алгоритмы для их вычислений.

В **главе I** разработаны две версии МОЛ: тау-версия и *p*-версия, которые имеют разные схемы трансформации УЧП в ОДУ. Тау-версия использует известные в физике варианты уравнений, которые описывают распределение характеристик поля на прямой линии, или трансформацию УЧП в ОДУ чисто математической подстановкой с параметризацией Радона соответствующей прямой линии. *P*-версия основана на непосредственном применении ППР к соответствующим УЧП. Для ПЗ применимы обе версии МОЛ, для ОЗ применяется тау-версия.

В **главе 2** представлен анализ явных формул МОЛ и продемонстрирована ее неустойчивость относительно возмущений исходных данных [3]. Поэтому в численной реализации сконструированных вариантов МОЛ используется регуляризация в самом простом и быстрм варианте, разработанном автором – рекурсивном сглаживании кубическими сплайнами [8].

В **главах 3, 4** представлены подробные формулы для решения ПЗ для эллиптических и параболических PDE. Используются тау-версия у *p*-версия МОЛ и его качество подтверждается численными экспериментами на модельных примерах.

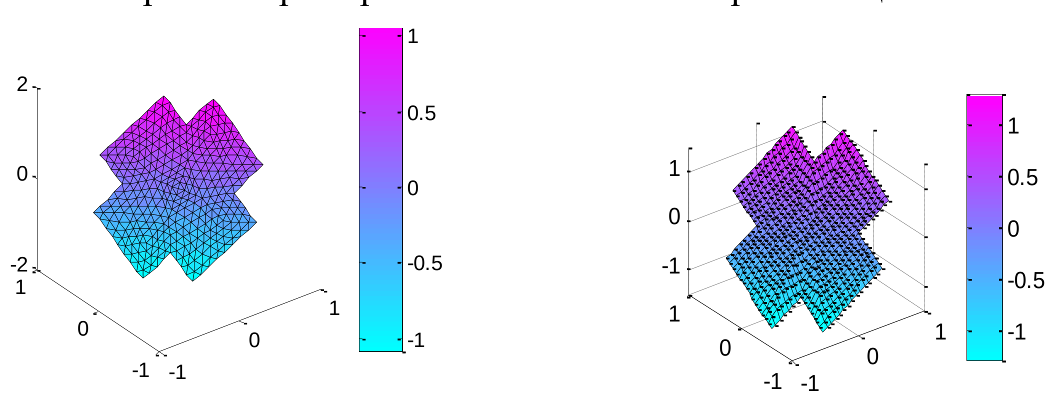
Глава 5 посвящена коэффициентной ОЗ для параболических уравнений, уравнений Лапласа и ОЗ для источника в уравнении Пуассона.

В **главе 6** полученные результаты применяются для построения некоторых новых быстрых схем для компьютерной томографии. Качество и быстрота компьютерной реализации предлагаемых схем подтверждены численными экспериментами на модельных примерах.

В **главе 7** на основе 2D результатов разработаны схемы решения некоторых трехмерных (3D) прямых и обратных задач. Предлагаемые схемы используют дискретизации по некоторым переменным и применение 2D решения для каждой плоскости среза. На некоторых числовых примерах показана возможность такого сведения 3D проблемы к семейству двумерных задач.

Итак, на базе ПОЛ, построены две версии МОЛ, которые дают явные приближенного решения упомянутых проблем. Построены алгоритмы и реализованы как программный пакет в системе MATLAB, что дает возможность решить проблемы с хорошим качеством и более быстро, чем традиционные методы. Это подтверждается численными примеры, в частности при сравнении с PDE Toolbox MATLAB

В приведенном ниже примере мы имеем точное решение уравнения Лапласа $u(x,y)=x+y$ в области симметричного креста. На графике слева – приближенное решение с программой *pdemodel* из PDE Toolbox MATLAB с числом точек дискретизации по каждой переменной *N=20,* время вычислений 4.8192sec. Справа - приближенное решение, построенное при той же дискретизации с помощью МОЛ, время вычислений - 0.8177sec., то есть в шесть раз быстрее при том же качестве аппроксимации.



Литература:

[1] A.N. Tijonov and A.A. Samarsky, Equations of Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1980.

[2] A.A. Samarsky, Theory of Difference Schemes, Moscow: Nauka, 1977.

[3] A.N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, Methods for Solving Ill-Posed Problems. Washington: Winston & Sons, 1977.

[4] Isakov, V., Inverse Problems for Partial differential Equations, New York: Springer, 1998.

[5] V.A. Morozov, Regularization Methods for ill-posed problems. London: CRC Press, 1993.

[6] O. M. Alifanov, Inverse Heat Transfer Problems, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.

[7] Stanley R. Deans, The Radon Transform and some of its Applications, New-York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.

[8] A. I. Grebennikov. Spline Approximation Method and its Applications. Moscow: MAX Press, 2004.