

УДК 519.72

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-40-47

## Компактная спецификация полярных кодов

Р. А. Морозов<sup>а</sup>, инженер-исследователь, [orcid.org/0000-0003-0077-1246](https://orcid.org/0000-0003-0077-1246)

П. В. Трифонов<sup>а</sup>, доктор техн. наук, доцент, [orcid.org/0000-0001-6960-0942](https://orcid.org/0000-0001-6960-0942), [petert@dcn.icc.spbstu.ru](mailto:petert@dcn.icc.spbstu.ru)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251, РФ

**Постановка проблемы:** для практической реализации системы связи, использующей семейство полярных кодов, требуется либо хранить множество достаточно объемных спецификаций, либо строить коды по запросу. Первый подход требует большого количества памяти, что делает схему непрактичной для многих приложений, например для мобильных устройств. Недостатки второго подхода – уязвимость к численным проблемам и сложность аппаратной реализации. Одним из решений является задание семейства кодов последовательностью подканалов, отсортированных по надежности. Однако данное решение приводит к невозможности оптимизировать каждый код семейства по отдельности. **Цель:** разработка метода компактного задания полярных кодов и подкодов. **Результаты:** предложен метод компактной спецификации полярных кодов. Его можно рассматривать как компромисс между построением кодов в реальном времени и хранением полного описания кодов в памяти. Предлагается хранить компактные спецификации заранее построенных кодов, содержащие разности между замороженным множеством оригинального кода и кода, построенного для двоичного стирающего канала с некоторой вероятностью стирания. Полная спецификация, необходимая алгоритму декодирования, может быть получена из компактной с помощью процедуры, имеющей низкую сложность и использующей только простые в аппаратной реализации операции умножения и сложения. Предлагаемый метод работает как с полярными кодами, так и с полярными подкодами и позволяет снизить количество требуемой памяти в 15–50 раз. **Практическая значимость:** возможность использовать семейства оптимизированных по отдельности полярных кодов в устройствах с ограниченным объемом памяти.

**Ключевые слова** – компактная спецификация, полярные коды, полярные подкоды, двоичный стирающий канал.

Для цитирования: Морозов Р. А., Трифонов П. В. Компактная спецификация полярных кодов. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 40–47. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-40-47

For citation: Morozov R. A., Trifonov P. V. Compact specification of polar codes. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 40–47 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-40-47

### Введение

Полярные коды [1, 2] — первый класс кодов, достигающих пропускной способности широкого класса каналов [3] с низкой сложностью построения, кодирования и декодирования. Полярные коды приняты в качестве стандарта для контрольного канала в сетях 5G [4].

Классический  $(n = 2^m, k)$ -полярный код задается множеством из  $(n - k)$  индексов замороженных символов, которые обычно выбираются как индексы наименее надежных подканалов. Надежность подканала может характеризоваться его пропускной способностью, параметром Бхаттачарьи или вероятностью ошибки на бит. Для вычисления параметра Бхаттачарьи битовых подканалов в случае двоичного стирающего канала (ДСтК) существуют очень простые рекурсивные выражения. В общем случае для вычисления надежности битовых подканалов может быть использован метод Тала и Варди [5]. Приближенные методы предложены для случаев канала с аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ) [6] и канала с рэлеевскими замираниями [7]. В работе [8] показано, что вероятность ошиб-

ки декодирования всех этих конструкций полярных кодов примерно равна.

Надежность подканалов может быть вычислена со сложностью  $O(n)$  операций. Однако эти операции могут быть сложны в аппаратной реализации. Например, метод Тала и Варди требует дискретизации распределения вероятности логарифмических отношений правдоподобия с малым шагом, а также сложных преобразований этих распределений. Аппроксимации, предложенные в работах [6, 7], используют трансцендентные функции.

Практическая реализация системы связи, использующей семейство полярных кодов, требует либо хранения множества спецификаций, длина которых может быть большой, либо построения кодов по запросу, «на лету». Первый подход ведет к потреблению большого количества памяти, что неприменимо для многих приложений, например для мобильных устройств. Второй подход численно не устойчив и очень сложен для аппаратной реализации.

В этой работе предложен метод компактной спецификации полярных кодов. Предлагаемый подход можно рассматривать как компромисс

между хранением заранее построенных полных спецификаций кодов и построением кодов на лету. Предлагается хранить компактные спецификации, которые содержат разность между оригинальным множеством замороженных символов и множеством замороженных символов для некоторого кода, построенного для ДСтК, а также параметры ДСтК. Полная спецификация может быть восстановлена из компактной с помощью простой процедуры, не использующей трансцендентные функции.

### Построение полярного кода для двоичного стирающего канала

#### Определение полярных кодов

Полярный  $(n = 2^m, k)$ -код определяется как множество векторов из  $\mathbb{F}_2^n$  вида  $\mathbf{c}_0^{n-1} = \mathbf{u}_0^{n-1} \mathbf{A}_m$ , где  $\mathbf{A}_m = \mathbf{F}^{\otimes m}$  —  $m$ -я степень Кронекера матрицы

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u}_0^{n-1} \in \mathbb{F}_2^n \quad \text{— двоичный вектор длины}$$

$n$ , состоящий из двух частей: для всех  $i \in \mathcal{F} \subset [n]$  полагается  $u_i = 0$ , а для всех  $i \in \mathcal{J} = [n] \setminus \mathcal{F}$  значения  $u_i$  содержат биты исходных данных, где  $|\mathcal{J}| = n - |\mathcal{F}|$ . Здесь и в дальнейшем  $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$ , а краткая запись  $\mathbf{a}_b^c$  обозначает вектор  $(a_b, a_{b+1}, \dots, a_c)$ . В случае когда  $c < b$ , запись  $\mathbf{a}_b^c$  обозначает пустой вектор. Множество  $\mathcal{F}$  назовем замороженным множеством, а множество  $\mathcal{J}$  — информационным множеством. Соответственно, символы  $u_i, i \in \mathcal{F}$  будем называть замороженными символами, а символы  $u_i, i \in \mathcal{J}$  — информационными символами. Множество  $\mathcal{F}$  предполагается известным приемнику.

#### Подканалы поляризирующего преобразования

Рассмотрим передачу кодового слова полярного кода  $\mathbf{c}_0^{n-1} = \mathbf{u}_0^{n-1} \mathbf{A}_m$  по симметричному по выходу каналу без памяти с двоичным входом  $W: \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathcal{Y}$ . Вектор на выходе канала передачи данных  $\mathbf{y}_0^{n-1}$  будем называть принятым сигналом. Канал  $W$  задан величинами  $W(y|x) \in \mathbb{R}_+$ , имеющими смысл вероятности при конечном или счетном множестве  $\mathcal{Y}$  или плотности вероятности в случае, когда  $\mathcal{Y}$  несчетно. После приема сигнала  $\mathbf{y}_0^{n-1}$  демодулятором вычисляются апостериорные вероятности

$$W(c_i | y_i) = \frac{W(y_i | c_i)}{W(y_i | 0) + W(y_i | 1)}.$$

Для вычисления данных величин предполагается, что демодулятору известен исходный канал. Алгоритм декодирования методом последовательного исключения состоит в последовательном вычислении величин

$$W_m^{(\phi)}(\mathbf{u}_0^{\phi-1}, u_\phi | \mathbf{y}_0^{n-1}) = \sum_{\mathbf{u}_{\phi+1}^{n-1} \in \mathbb{F}_2^{n-\phi-1}} W^n(\mathbf{u}_0^{n-1} \mathbf{A}_m | \mathbf{y}_0^{n-1})$$

для каждого  $u_\phi \in \mathbb{F}_2$ , где

$$W^n(\mathbf{c}_0^{n-1} | \mathbf{y}_0^{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} W(c_i | y_i),$$

и принятии решения

$$\hat{u}_\phi = \begin{cases} 0, & \phi \in \mathcal{F} \\ \arg \max_{u_\phi \in \mathbb{F}_2} W_m^{(\phi)}(\hat{\mathbf{u}}_0^{\phi-1}, u_\phi | \mathbf{y}_0^{n-1}), & \phi \in \mathcal{J}. \end{cases}$$

Таким образом,  $n$  копий исходного канала передачи данных  $W$  преобразуются в  $n$  различных синтезированных каналов  $W_m^{(\phi)}(\mathbf{u}_0^\phi | \mathbf{y}_0^{n-1})$  для  $\phi \in [n]$ , которые также в дальнейшем будут именовать подканалами поляризирующего преобразования или просто подканалами.

Показано [9–11], что множество синтезированных подканалов частично упорядочено по надежности независимо от исходного канала. Следовательно, множества замороженных символов полярных кодов с одинаковыми параметрами, построенных для разных каналов, будут схожи.

Для выходов подканалов справедливы рекурсивные формулы

$$\begin{aligned} W_N^{(2i)}(\mathbf{u}_0^{2i} | \mathbf{y}_0^{N-1}) &= \\ &= \sum_{u_{2i+1} \in \mathbb{F}_2} W_{N/2}^{(i)}(\mathbf{u}_{0,e}^{2i+1} + \mathbf{u}_{0,o}^{2i+1} | \mathbf{y}_0^{N/2-1}) \times \\ &\quad \times W_{N/2}^{(i)}(\mathbf{u}_{0,o}^{2i+1} | \mathbf{y}_{N/2}^{N-1}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_N^{(2i+1)}(\mathbf{u}_0^{2i+1} | \mathbf{y}_0^{N-1}) &= \\ &= W_{N/2}^{(i)}(\mathbf{u}_{0,e}^{2i+1} + \mathbf{u}_{0,o}^{2i+1} | \mathbf{y}_0^{N/2-1}) W_{N/2}^{(i)}(\mathbf{u}_{0,o}^{2i+1} | \mathbf{y}_{N/2}^{N-1}), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{a}_{b,e}^c$  ( $\mathbf{a}_{b,o}^c$ ) — вектор, состоящий из элементов вектора  $\mathbf{a}$  с четными (нечетными) индексами  $i$ :  $b \leq i \leq c$ .

#### Построение полярных кодов для двоичного стирающего канала

Пусть  $W$  — ДСтК с вероятностью стирания  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , заданный переходными вероятностями  $W(x|x) = 1 - \varepsilon$ ,  $W(\theta|x) = \varepsilon$ , где  $\theta$  — символ стирания. Заметим, что в этом случае все подканалы  $W_\lambda^{(i)}$  также являются ДСтК. Обозначим под  $\varepsilon_\lambda^{(i)}$  вероятность стирания в канале  $W_\lambda^{(i)}$ . Тогда справедливо

$$\varepsilon_\lambda^{(2i)} = \varepsilon_{\lambda-1}^{(i)} (2 - \varepsilon_{\lambda-1}^{(i)}); \quad \varepsilon_\lambda^{(2i+1)} = \varepsilon_{\lambda-1}^{(i) 2}.$$

При построении полярных кодов для ДСтК в качестве информационного множества  $\mathcal{I}$  выбираются  $k$  индексов подканалов  $W_m^{(i)}$  с наименьшей вероятностью стирания  $\varepsilon_m^{(i)}$ .

### Полярные подкоды

Полярные подкоды [12] — обобщение полярных кодов. Полярный  $(n = 2^m, k)$ -подкод определяется как множество векторов  $\mathbf{c}_0^{n-1} = \mathbf{u}_0^{n-1} \mathbf{A}_m$  таких, что вектор  $\mathbf{u}$  удовлетворяет ограничениям замораживания  $\mathbf{u}_0^{n-1} \mathbf{V}^T = \mathbf{0}$ , где  $\mathbf{V}$  —  $(n - k) \times n$ -матрица ограничений полного ранга. Пусть  $t_i$  — позиция последнего ненулевого элемента  $i$ -й строки матрицы  $\mathbf{V}$ . Без потери общности можно предположить, что все  $t_i$  различны. Тогда

$$u_{t_i} = \sum_{j=0}^{t_i-1} V_{i,j} u_j, \quad t_i \in \mathcal{F}, \quad |\mathcal{F}| = n - k. \quad (1)$$

Множество  $\mathcal{F}$  замороженных символов разбивается на два множества  $\mathcal{F} = \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ , где  $\mathcal{S}$  состоит из всех номеров  $t_i$ , для которых вес  $i$ -й строки матрицы  $\mathbf{V}$  равен единице, а  $\mathcal{T}$  состоит из всех  $t_i$ , для которых вес  $i$ -й строки матрицы  $\mathbf{V}$  больше единицы. Множество  $\mathcal{S}$  будем называть статически замороженным, как и символы  $u_i$ ,  $i \in \mathcal{S}$ , а множество  $\mathcal{T}$  будем называть динамически замороженным. Заметим, что полярные коды являются полярными подкодами без динамически замороженных символов, т. е. при  $\mathcal{T} = \emptyset$   $\mathcal{F} = \mathcal{S}$ .

### Компактная спецификация

#### Аппроксимация замороженного множества

Пусть дан  $(n = 2^m, k)$ -полярный код с замороженным множеством  $\mathcal{F}$ . Предлагается найти полярный код, построенный для ДСтК с почти таким же замороженным множеством  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \mathcal{B}_{\varepsilon^*, f^*}^{(m)}$ , которое назовем ДСтК-аппроксимацией множества  $\mathcal{F}$ , где

$$(\varepsilon^*, f^*) = \arg \min_{\substack{0 < \varepsilon < 1 \\ 0 \leq f < n}} |\mathcal{F} \Delta \mathcal{B}_{\varepsilon, f}^{(m)}|, \quad (2)$$

$\mathcal{B}_{\varepsilon, f}^{(m)}$  — замороженное множество  $(2^m, 2^m - f)$  полярного кода, построенного, как описано выше. Тогда данный полярный код может быть задан четверкой  $S(m, \mathcal{F}) = (m, \varepsilon^*, f^*, \mathcal{F} \Delta \mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ .

Псевдокод построения ДСтК-аппроксимации представлен на рис. 1. Для упрощения реализации предлагается оптимизировать  $|\mathcal{F} \Delta \mathcal{B}_{\varepsilon, f}^{(m)}|$  не по всем значениям  $\varepsilon \in (0, 1)$ , а по значениям из конечного множества  $\mathcal{E}$ . Для каждого  $\varepsilon \in \mathcal{E}$  алгоритм

```

Вход :  $m, \mathcal{F}$ 
Выход: ДСтК-аппроксимация замороженного множества  $\mathcal{F}$ 
 $D \leftarrow \mathcal{F}, \varepsilon^* \leftarrow 0, f^* \leftarrow 0$ 
for  $\varepsilon \in \mathcal{E}$  do
     $\varepsilon_{0,0} \leftarrow \varepsilon$ 
    for  $\lambda \leftarrow 0 \dots m - 1$  do
        for  $i \leftarrow 0 \dots 2^\lambda - 1$  do
             $\varepsilon_{\lambda+1}^{(2i)} \leftarrow \varepsilon_\lambda^{(i)} \cdot (2 - \varepsilon_\lambda^{(i)})$ 
             $\varepsilon_{\lambda+1}^{(2i+1)} \leftarrow \varepsilon_\lambda^{(i)^2}$ 
        end for
    end for
     $\Pi \leftarrow (\varepsilon_{m,i}, i)_{i=0}^{2^m-1}$ 
    отсортировать  $\Pi$  по  $\varepsilon_{m,i}$  в убывающем порядке
     $\delta \leftarrow |\mathcal{F}|$ 
    for  $f = 1, \dots, 2^m$  do
        if  $\Pi_{f-1}[1] \notin \mathcal{F}$  then  $\delta \leftarrow \delta + 1$  else  $\delta \leftarrow \delta - 1$ ;
        if  $\delta < |D|$  then
             $D \leftarrow \mathcal{F} \Delta \{\Pi_i[1] \mid 0 \leq i < f\}$ 
             $\varepsilon^* \leftarrow \varepsilon, f^* \leftarrow f$ 
        end if
    end for
return :  $(m, \varepsilon^*, f^*, D)$ 
    
```

- **Рис. 1.** Вычисление ДСтК-аппроксимации  $S(m, \mathcal{F})$
- **Fig. 1.** Computing BEC-approximation  $S(m, \mathcal{F})$  of a frozen set

находит вероятности стирания  $\varepsilon_m^{(i)}$  в подканалах и сортирует подканалы по вероятности стирания в убывающем порядке. Таким образом, для любого  $f \in [n]$  множество  $\mathcal{B}_{\varepsilon, f}^{(m)}$  может быть получено как  $f$  первых элементов отсортированного массива  $\Pi_i[1]$ ,  $i = 0, \dots, f - 1$ . Для каждого  $f \in [n]$  вычисляется мощность симметрической разности исходного замороженного множества  $\mathcal{F}$  и аппроксимирующего множества  $\mathcal{B}_{\varepsilon, f}^{(m)}$ . Алгоритм возвращает четверку  $(m, \varepsilon^*, f^*, D)$ , соответствующую минимуму величины  $|D| = |\mathcal{F} \Delta \mathcal{B}_{\varepsilon, f}^{(m)}|$ .

Для упрощения реализации можно заменить строку  $\varepsilon_{\lambda+1}^{(2i)} \leftarrow \varepsilon_\lambda^{(i)} \cdot (2 - \varepsilon_\lambda^{(i)})$  псевдокода на рис. 1 на

$$\varepsilon_{\lambda+1}^{(2i)} \leftarrow 2\varepsilon_\lambda^{(i)}, \quad (3)$$

а также заменить вероятности  $\varepsilon_\lambda^{(i)}$  на их логарифмы. Тогда алгоритм построения ДСтК-аппроксимации будет использовать только операции сложения. Эксперименты показывают, что замена (3) практически не влияет на итоговый размер спецификации, но зато делает возможным переход в логарифмическую область, что позволяет избежать операций умножения и численно неустойчивых операций вычитания.

### Рекурсивная спецификация

Предлагается использовать представление полярных кодов как обобщенных каскадных кодов (ОКК) для дальнейшего уменьшения размера получаемой спецификации следующим образом.

Обобщенный каскадный код [13, 14] над полем  $\mathbb{F}_2$  может быть определен следующей опера-

цией кодирования. Пусть  $\mathbb{A}^{(0)}, \mathbb{A}^{(1)}, \dots, \mathbb{A}^{(N-1)}$  — последовательность  $(n, k_j)$ -внешних кодов над  $\mathbb{F}_2$ ,  $0 \leq k_j \leq n$ . Пусть  $\mathbb{B}^{(0)} \supset \mathbb{B}^{(1)} \supset \dots \supset \mathbb{B}^{(N-1)}$  — последовательность вложенных внутренних кодов над  $\mathbb{F}_2$  с параметрами  $(N, K_j = N - j)$  такая, что порождающая матрица кода  $\mathbb{B}^{(j)}$  состоит из  $K_j$  последних строк некоторой матрицы  $\mathbf{G}$ .

Заданный блок данных  $\mathbf{a}_0^{k-1}$  размера  $k = \sum_{i=0}^{N-1} k_i$  кодируется внешними кодами. В результате получается  $N$  кодовых слов длины  $n$ . Запишем их построчно в таблицу и закодируем каждый из  $n$  столбцов кодом  $\mathbb{B}^{(0)}$ . Тогда полученные  $Nn$  бит формируют кодовое слово  $(Nn, k)$ -ОКК.

Разобьем исходное замороженное множество  $\mathcal{F}$  на два подмножества  $\mathcal{F}_l = \{i \in \mathcal{F} \mid i < 2^{m-1}\}$  и  $\mathcal{F}_r = \{i - 2^{m-1} \mid i \in \mathcal{F} \mid i \geq 2^{m-1}\}$ . Заметим, что исходный полярный код можно представить как ОКК с двумя внешними полярными кодами длины  $2^{m-1}$  с замороженными множествами  $\mathcal{F}_l$  и  $\mathcal{F}_r$  и внутренним полярным кодом длины 2.

Рекурсивная спецификация строится следующим образом. Сначала вычисляется спецификация  $S(m, \mathcal{F})$ , как показано на рис. 1. Затем вычисляются спецификации внешних кодов  $S(m-1, \mathcal{F}_l)$  и  $S(m-1, \mathcal{F}_r)$ . Если конкатенация двух спецификаций  $S(m-1, \mathcal{F}_l)S(m-1, \mathcal{F}_r)$  короче, чем  $S(m, \mathcal{F})$ , то исходный код может быть задан в более компактном виде. В некоторых случаях дальнейшее разбиение замороженных множеств внешних полярных кодов приводит к еще более компактной спецификации.

В алгоритме построения компактной спецификации полярного кода (рис. 2)  $\|S\|$  обозначает длину спецификации  $S = (m, \varepsilon^*, f^*, D)$ , определяемую как  $\|S\| = \|(m, \varepsilon^*, f^*, D)\| = |D| + 4$ . Действительно, чтобы обеспечить однозначное восстановление кода, необходимо хранить значения  $m, \varepsilon^*, f^*, |D|$  и элементы множества  $D$ . Длина конкатенации двух спецификаций равна  $\|S' \cdot S''\| = \|S'\| + \|S''\|$ . Заметим, что для определения

конца спецификации (в общем случае составленной из спецификаций нескольких замороженных множеств) необходимо в начале компактной спецификации указать длину кода.

### Границы на значение $|D|$

Для полярных кодов было показано, что множество подканалов поляризующего преобразования частично упорядочено по пропускной способности, что позволяет получить некоторые из элементов замороженного множества независимо от канала, для которого был построен полярный код. В теореме 1 статьи [9] была определена верхняя граница на число неизвестных (зависящих от исходного канала передачи данных) элементов замороженного множества  $\mathcal{F}$ , равная  $U(m) = M(m) \log(2^{m+1}/M(m))$ , где  $M(m)$  — максимальное число подмножеств с одинаковой суммой элементов (целочисленная последовательность номер A025591 в [15]). Асимптотически  $U(m) = O(n \log \log n / \log^{3/2} n)$ . Можно рассматривать  $U(m)$  как верхнюю границу на длину компактной спецификации. Действительно, в худшем случае все подканалы, которые не являются всегда замороженными или информационными вне зависимости от исходного канала, меняют свой статус при переходе от ДСтК-аппроксимации к исходному полярному коду, т. е.  $|D| \leq U(m)$ . Такой случай недостижим на практике, так как при построении ДСтК-аппроксимации выбирается ДСтК, минимизирующий  $|D|$ . Результаты на рис. 3 показывают, что для  $m = 5 \dots 15$  данная оценка неточная.

### Спецификация полярных подкодов

Хорошие полярные подкоды [16–18], как правило, имеют относительно небольшое число динамически замороженных символов, т. е. символов  $u_{t_i}, t_i \in \mathcal{T}$ .

Пусть  $\tilde{\mathbf{V}}$  — матрица, состоящая из строк матрицы  $\mathbf{V}$ , определенной в (1), веса не менее двух.

**Вход :**  $m, \mathcal{F}$

**Выход:** Компактная спецификация полярного кода длины  $2^m$  с замороженным множеством  $\mathcal{F}$

```

if  $m \leq 1$  then
  return :  $S(m, \mathcal{F})$ 
 $S_l \leftarrow S(m, \mathcal{F})$ 
 $s_l \leftarrow S(m-1, \mathcal{F}_l)$ 
 $s_r \leftarrow S(m-1, \mathcal{F}_r)$ 
if  $\|s_l \cdot s_r\| < \|S_l\|$  then
  return :  $S^*(m-1, \mathcal{F}_l) \cdot S^*(m-1, \mathcal{F}_r)$ 
else
  return :  $S_l$ 
    
```

■ **Рис. 2.** Компактная спецификация полярного кода  
 ■ **Fig. 2.** Compact specification of a polar code



Матрица  $\tilde{\mathbf{V}}$  обычно разреженная. Тривиальный метод описания матрицы  $\tilde{\mathbf{V}}$  — указать для каждой строки число ненулевых элементов и их позиции. Однако для хороших полярных подкодов множества индексов ненулевых элементов для разных строк обычно имеют общие элементы. Поэтому предлагается представить матрицу  $\tilde{\mathbf{V}}$  списком индексов ненулевых столбцов в совокупности со списком битовых масок, соответствующих ненулевым столбцам. Оставшиеся строки могут быть заданы элементами множества  $\mathcal{S}$ . Множество таких значений может быть задано с помощью рекурсивной компактной спецификации.

**Пример.** Рассмотрим (16, 6, 6)-полярный подкод расширенного кода БЧХ [19, 20] с матрицей ограничений

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}} \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000000000000000 \\ 0100000000000000 \\ 0010000000000000 \\ 0001000000000000 \\ 0000100000000000 \\ 0000001000000000 \\ 0000000010000000 \\ 0000000001000000 \\ 0000000000100000 \\ 00000000000101000 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, множество статически замороженных символов равно  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ . Ограничения динамического замораживания следующие:  $u_9 = u_5, u_{10} = u_5, u_{12} = u_{10}$ .

Спецификация статически замороженного множества для  $\mathcal{E} = \{i/32\}_{i=1}^{31}$  выглядит следующим образом:

$$S(4, \mathcal{S}) = \left( m = 4, \varepsilon^* = \frac{1}{32}, f^* = 6, D = \{6\} \right),$$

ее длина равна  $\|S(4, \mathcal{F}^{(s)})\| = 5$ . Множество ненулевых столбцов матрицы  $\tilde{\mathbf{V}}$  составляет  $N = \{5, 9, 10, 12\}$ . Соответствующие битовые маски равны

$$B = [011_2, 001_2, 110_2, 100_2] = [3, 1, 6, 4].$$

Таким образом, компактная спецификация полярного кода имеет вид

$$\underbrace{16, 4}_n, \underbrace{0, 03125}_m, \underbrace{6}_\varepsilon^*, \underbrace{1}_f^*, \underbrace{6}_D, \underbrace{4}_D, \underbrace{5, 9, 10, 12}_N, \underbrace{3, 1, 6, 4}_B.$$

Спецификация содержит 15 целых чисел (вместо дроби  $\varepsilon^* = \frac{1}{32}$  можно хранить ее числитель).

Все числа по порядку не превосходят длины кода, а элементы множества  $B$  находятся в диапазоне до  $2^{|N|} = 8$ . Развернутая спецификация имеет размер 19 целых чисел и включает в себя числа  $n, k, |\mathcal{S}|$ , множество  $\mathcal{S}$ , веса строк матрицы  $\tilde{\mathbf{V}}$  и индексы ненулевых элементов строк матрицы  $\tilde{\mathbf{V}}$ . Веса строк нужны для обнаружения конца одного ограничения и начала другого.

### Развертывание компактной спецификации

Рассмотрим процедуру развертывания компактной спецификации как алгоритм, принимающий на вход компактную спецификацию и возвращающий матрицу ограничений  $\mathbf{V}$ .

Сначала вычисляется матрица  $\hat{\mathbf{V}}$  следующим образом.

1. Считывается длина кода  $n$ .
2. Пока общая длина обработанных внешних кодов  $n_i = \sum_{j=0}^{i-1} 2^{m_j} < n$ , считывается  $S_i = (m_i, p_i, f_i, D_i)$ . Восстанавливается множество  $\mathcal{S}_i$  статически замороженных символов:

$$\mathcal{S}_i = \left\{ j + n_i \mid j \in \mathcal{B}_{p_i, f_i}^{(m_i)} \Delta D_i \right\}.$$

Множество  $\mathcal{B}_{p_i, f_i}^{(m_i)}$  вычисляется по значениям  $m_i, p_i, f_i$  как  $\{P_j[0] \mid j = 0, \dots, f_i - 1\}$ , где  $P_j$  вычисляется, как показано на рис. 2.

3. Статически замороженное множество вычисляется как  $\mathcal{S} = \cup_i \mathcal{S}_i$ . Матрица  $\hat{\mathbf{V}}$  представляет собой строки единичной матрицы  $I_n$  с номерами из  $\mathcal{S}$ .

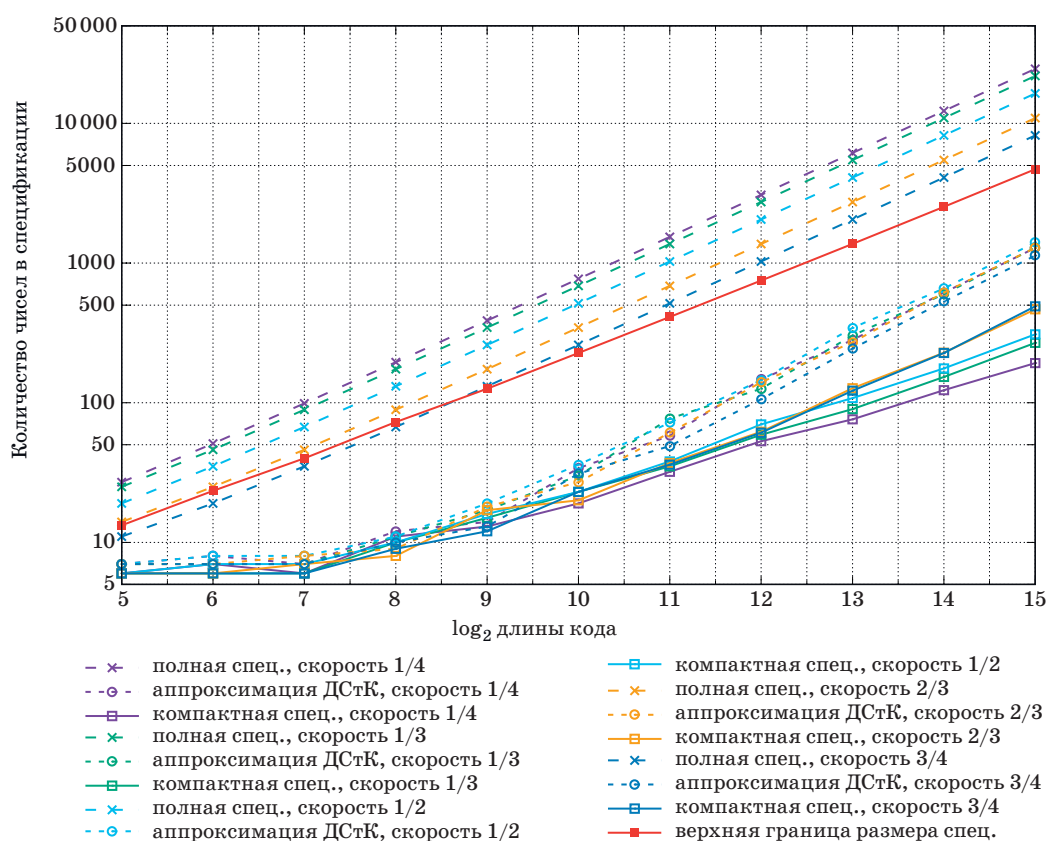
Затем считываются битовые маски и по ним вычисляется матрица ограничений динамического замораживания  $\tilde{\mathbf{V}}$ . Общая матрица ограничений полярного подкода выражается в виде

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}} \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{pmatrix}.$$

### Численные результаты

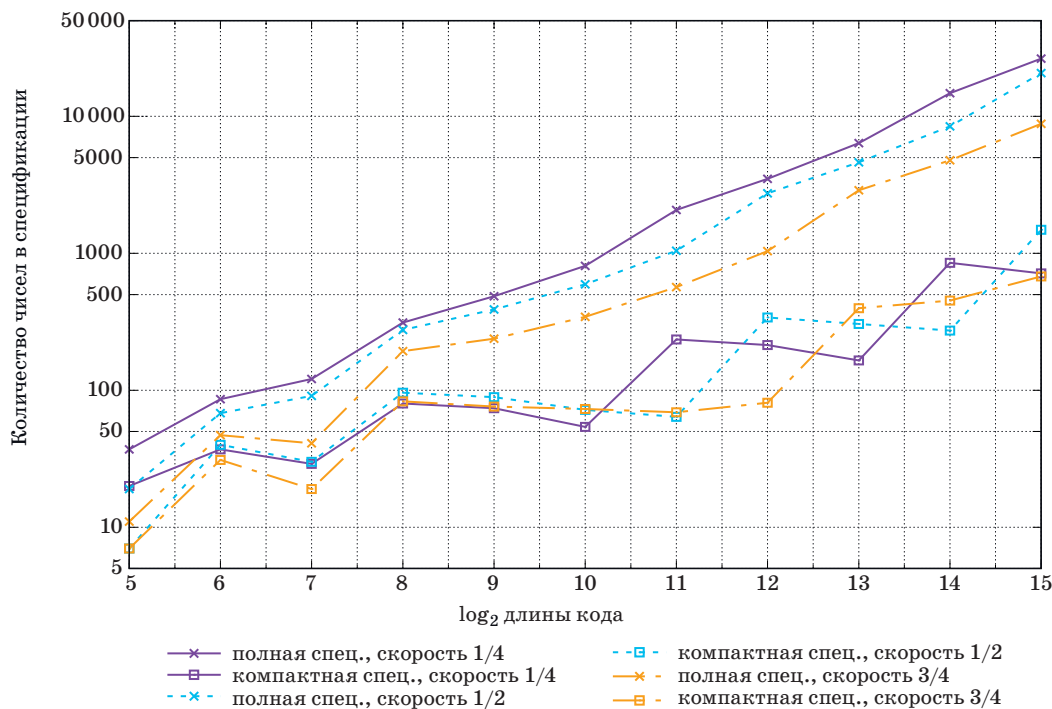
Компактные спецификации были построены для двух семейств полярных кодов с использованием аппроксимации (3).

Первое семейство состоит из 55 полярных кодов длин  $2^m, 5 \leq m \leq 15$  и скоростей  $r_0 = \frac{1}{4}, r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = \frac{2}{3}, r_4 = \frac{3}{4}$ . Коды были построены с помощью гауссовской аппроксимации для значений отношения сигнал/шум на бит  $E_b/N_0$ , вычисленных по формуле  $\eta_i = 1 + 0,5i$  дБ. Общий размер полных спецификаций 163 936 целочисленных значений, а общий размер компактных спецификаций 4016 целочисленных значений, что примерно в 41 раз меньше. На рис. 3 дано сравнение размера полных спецификаций, ДСтК-аппроксимаций и компактных спецификаций кодов различной



■ **Рис. 3.** Размер полных и компактных спецификаций (ДСтК-аппроксимации и рекурсивной спецификации) полярных кодов

■ **Fig. 3.** Comparison of the size of straightforward specification, BEC-approximation and recursive compact specification, of polar codes



■ **Рис. 4.** Размер полных и компактных спецификаций полярных подкодов

■ **Fig. 4.** The size of straightforward and compact specifications of polar subcodes

длины. Можно видеть, что ДСтК-аппроксимация позволяет снизить объем потребляемой памяти в 10 раз. Компактная спецификация позволяет снизить объем потребляемой памяти еще до 5 раз. Второе семейство состоит из полярных подкодов кодов БЧХ [12] тех же длин и скоростей, что и первое семейство. Конструктивное минимальное расстояние соответствующих кодов БЧХ выбрано как наименьшее минимальное расстояние, приводящее к появлению нетривиальных ограничений динамического замораживания (непустой матрице  $\tilde{\mathbf{V}}$ ). Битовые маски таких кодов могут быть представлены как 16-битовые целые. Полные спецификации содержат 182 308 целых чисел, компактные спецификации содержат 10 582 целых числа, что примерно в 17 раз меньше. На рис. 4 представлено сравнение размеров полных и компактных спецификаций полярных подкодов. Во

всех рассмотренных случаях минимизация в (2) происходила по множеству вероятностей стирания

$$\mathcal{E} = \left\{ \frac{i}{32} \mid 1 \leq i \leq 31 \right\}.$$

## Заключение

В данной статье предложен метод компактной спецификации полярных (под)кодов. Метод использует сходство множеств замороженных символов полярных кодов, построенных для различных каналов, а также представление полярных кодов как обобщенных каскадных. Размер компактной спецификации на порядок меньше размера полной спецификации, что позволяет описывать большие семейства полярных кодов, используя небольшой объем памяти.

## Литература

1. **Arikan E.** Channel polarization: A method for constructing capacity achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, vol. 55, no. 7, pp. 3051–3073. doi:10.1109/TIT.2009.2021379
2. **Arikan E.** Serially concatenated polar codes. *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 64549–64555. doi:10.1109/ACCESS.2018.2877720
3. **Sasoglu E., Telatar E., Arikan E.** Polarization for arbitrary discrete memoryless channels. *Proc. of IEEE Information Theory Workshop*, 2009, pp. 144–148.
4. **Hui D., Sandberg S., Blankenship Y., Andersson M., Grosjean L.** Channel coding in 5G new radio: Tutorial overview and performance comparison with 4G LTE. *IEEE Vehicular Technology Magazine*, 2018, pp. 60–69. doi:10.21227/dq3x-8a54
5. **Tal I., Vardy A.** How to construct polar codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, vol. 59, pp. 6562–6582. doi:10.1109/TIT.2013.2272694
6. **Trifonov P. V.** Efficient design and decoding of polar codes. *IEEE Transactions on Communications*, 2012, vol. 60, pp. 3221–3227. doi:10.1109/TCOMM.2012.081512.110872
7. **Trifonov P. V.** Design of polar codes for Rayleigh fading channel. *Proc. of Intern. Symp. on Wireless Communication Systems*, 2015, pp. 331–335. doi:10.1109/ISWCS.2015.7454357
8. **Vangala H., Viterbo E., Hong Y.** A comparative study of polar code constructions for the AWGN channel. *CoRR*, 2015, vol. abs/1501.02473.
9. **Mondelli M., Hassani H., Urbanke R. L.** Construction of polar codes with sublinear complexity. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2017, pp. 1853–1857.
10. **Schurich C.** A partial order for the synthesized channels of a polar code. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2016, pp. 220–224. doi:10.1109/ISIT.2016.7541293
11. **Bardet M., Dragoi V., Otmani A., Tillich J.-P.** Algebraic properties of polar codes from a new polynomial formalism. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2016, pp. 230–234. doi:10.1109/ISIT.2016.7541295
12. **Trifonov P. V., Miloslavskaya V. D.** Polar subcodes. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2016, vol. 34, pp. 254–266. doi:10.1109/JSAC.2015.2504269
13. **Blokh E. L., Zyablov V. V.** Coding of generalized concatenated codes. *Problems of Information Transmission*, 1974, vol. 10, no. 3, pp. 45–50.
14. **Zyablov V. V., Shavgulidze S. A., Bossert M.** An introduction to generalized concatenated codes. *European Transactions on Telecommunications*, 1999, vol. 10, no. 6, pp. 609–622.
15. **Sloane N. J. A.** *The on-line encyclopedia of integer sequences*. Available at: <https://oeis.org/> (accessed 22 December 2018).
16. **Trifonov P. V., Trofimiuk G. A.** A randomized construction of polar subcodes. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2017, pp. 1863–1867.
17. **Trifonov P. V.** Randomized chained polar subcodes. *Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conf. Workshops*, 2018, pp. 292–297. doi:10.1109/WCNCW.2018.8369001
18. **Wang T., Qu D., Jiang T.** Parity-check-concatenated polar codes. *IEEE Communications Letters*, 2016, vol. 20, pp. 2342–2345. doi:10.1109/LCOMM.2016.2607169
19. **Bose R. C., Ray-Chaudhuri D. K.** On a class of error correcting binary group codes. *Information and Control*, 1960, vol. 3, pp. 68–79.
20. **Hocquenghem A.** Codes correcteurs d'Erreurs. *Chiffres (Paris)*, 1959, vol. 2, pp. 147–156.

UDC 519.72

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-40-47

**Compact specification of polar codes**R. A. Morozov<sup>a</sup>, Engineer-Researcher, orcid.org/0000-0003-0077-1246P. V. Trifonov<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0001-6960-0942, petert@dcn.icc.spbstu.ru<sup>a</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29, Politekhnicheskaya St., 195251, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** Practical implementation of a communication system which employs a family of polar codes requires either to store a number of large specifications or to construct the codes by request. The first approach assumes extensive memory consumption, which is inappropriate for many applications, such as those for mobile devices. The second approach can be numerically unstable and hard to implement in low-end hardware. One of the solutions is specifying a family of codes by a sequence of subchannels sorted by reliability. However, this solution makes it impossible to separately optimize each code from the family. **Purpose:** Developing a method for compact specifications of polar codes and subcodes. **Results:** A method is proposed for compact specification of polar codes. It can be considered a trade-off between real-time construction and storing full-size specifications in memory. We propose to store compact specifications of polar codes which contain frozen set differences between the original pre-optimized polar codes and the polar codes constructed for a binary erasure channel with some erasure probability. Full-size specification needed for decoding can be restored from a compact one by a low-complexity hardware-friendly procedure. The proposed method can work with either polar codes or polar subcodes, allowing you to reduce the memory consumption by 15–50 times. **Practical relevance:** The method allows you to use families of individually optimized polar codes in devices with limited storage capacity.

**Keywords** — compact specification, polar codes, polar subcodes, binary erasure channel.

**For citation:** Morozov R. A., Trifonov P. V. Compact specification of polar codes. *Informatsionno-upravlyaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 40–47 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-40-47

**References**

1. Arikan E. Channel polarization: A method for constructing capacity achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, vol. 55, no. 7, pp. 3051–3073. doi:10.1109/TIT.2009.2021379
2. Arikan E. Serially concatenated polar codes. *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 64549–64555. doi:10.1109/ACCESS.2018.2877720
3. Sasoglu E., Telatar E., Arikan E. Polarization for arbitrary discrete memoryless channels. *Proc. of IEEE Information Theory Workshop*, 2009, pp. 144–148.
4. Hui D., Sandberg S., Blankenship Y., Andersson M., Grosjean L. Channel coding in 5G new radio: Tutorial overview and performance comparison with 4G LTE. *IEEE Vehicular Technology Magazine*, 2018, pp. 60–69. doi:10.21227/dq3x-8a54
5. Tal I., Vardy A. How to construct polar codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, vol. 59, pp. 6562–6582. doi:10.1109/TIT.2013.2272694
6. Trifonov P. V. Efficient design and decoding of polar codes. *IEEE Transactions on Communications*, 2012, vol. 60, pp. 3221–3227. doi:10.1109/TCOMM.2012.081512.110872
7. Trifonov P. V. Design of polar codes for Rayleigh fading channel. *Proc. of Intern. Symp. on Wireless Communication Systems*, 2015, pp. 331–335. doi:10.1109/ISWCS.2015.7454357
8. Vangala H., Viterbo E., Hong Y. A comparative study of polar code constructions for the AWGN channel. *CoRR*, 2015, vol. abs/1501.02473.
9. Mondelli M., Hassani H., Urbanke R. L. Construction of polar codes with sublinear complexity. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2017, pp. 1853–1857.
10. Schurch C. A partial order for the synthesized channels of a polar code. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2016, pp. 220–224. doi:10.1109/ISIT.2016.7541293
11. Bardet M., Dragoi V., Otmani A., Tillich J.-P. Algebraic properties of polar codes from a new polynomial formalism. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2016, pp. 230–234. doi:10.1109/ISIT.2016.7541295
12. Trifonov P. V., Miloslavskaya V. D. Polar subcodes. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2016, vol. 34, pp. 254–266. doi:10.1109/JSAC.2015.2504269
13. Blokh E. L., Zyablov V. V. Coding of generalized concatenated codes. *Problems of Information Transmission*, 1974, vol. 10, no. 3, pp. 45–50.
14. Zyablov V. V., Shavgulidze S. A., Bossert M. An introduction to generalized concatenated codes. *European Transactions on Telecommunications*, 1999, vol. 10, no. 6, pp. 609–622.
15. Sloane N. J. A. *The on-line encyclopedia of integer sequences*. Available at: <https://oeis.org/> (accessed 22 December 2018).
16. Trifonov P. V., Trofimiuk G. A. A randomized construction of polar subcodes. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2017, pp. 1863–1867.
17. Trifonov P. V. Randomized chained polar subcodes. *Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conf. Workshops*, 2018, pp. 292–297. doi:10.1109/WCNCW.2018.8369001
18. Wang T., Qu D., Jiang T. Parity-check-concatenated polar codes. *IEEE Communications Letters*, 2016, vol. 20, pp. 2342–2345. doi:10.1109/LCOMM.2016.2607169
19. Bose R. C., Ray-Chaudhuri D. K. On a class of error correcting binary group codes. *Information and Control*, 1960, vol. 3, pp. 68–79.
20. Hocquenghem A. Codes correcteurs d'Erreurs. *Chiffres (Paris)*, 1959, vol. 2, pp. 147–156.